Для відповідностей широко застосуються ще одна система термінів ***– геометрична термінологія.***

***Відповідністю*** φ (***між*** А і В) називають упорядковану трійку множин

φ = (А, В, R),

де А називають ***множиною відправлення***, В - ***множиною* *прибуття***, R⊆А×В - ***графіком відповідності*** φ.

З кожною відповідністю φ пов’язані ще дві множини:

множина Pr1(R) = {x∈A | ∃y∈B: (x, y)∈R} називають ***областю******визначення***, а

множину Pr2(R) = {y∈B | ∃x∈A: (x, y)∈R} – ***областю******значень*** відповідності φ.

Область визначення відповідності φ інколи ***позначають*** Dom φ або δφ, область значень – ρφ.

Легко бачити, що в загальному випадку δφ = рr1R⊆А, ρφ = рr2R⊆В.

Серед відповідностей між A і A окремо виділяється відповідність

iA = {(a, a) | a∈A},

яку називають ***тотожним*** ***перетворенням*** (***тотожною* *підстановкою***) A, ***діагональною* *відповідністю*** або ***діагоналлю*** A.

Нехай R⊆A×B – деяка відповідність (відношення) між множинами A і B (або φ = (А, В, R) деяка відповідність між множинами A і B з графіком R).

Якщо (a, b)∈R, то кажуть, що ***елемент*** b ***відповідає елементу*** a ***при відповідності***R (або φ).

***Образом***, або ***повним образом***, ***елемента*** a∈A ***при відповідності*** R (або φ) називають множину всіх елементів b∈B, які відповідають елементу a, і позначається R(a) (або φ(a)):

R(a) = {b∈B | (a, b)∈R, де a∈A}.

Отже, b∈R(a) ⇔ (a, b)∈R

або

φ(a) = {b∈B | (a, b)∈R, де a∈A}.

Отже, b∈φ(a) ⇔ (a, b)∈R.

***Прообразом***, або ***повним прообразом***, ***елемента*** b∈B ***при відповідності*** R (або φ) називають множину всіх елементів a∈A, яким відповідає елемент b, і позначають R-1(b) (або φ-1(b)):

R-1(b) = {a∈A | (a, b)∈R, де b∈B}.

Отже, a∈R-1(b) ⇔ (a, b)∈R

або

φ-1(b) = {a∈A | (a, b)∈R, де b∈B}.

Отже, a∈φ-1(b) ⇔ (a, b)∈R.

**Поняття образу та прообразу можна поширити на множини**.

Так, ***образом множини*** D⊆A ***при відповідності*** R (або φ) є об’єднання образів усіх елементів з D:

R(D) =∪a∈D R(a) = {b∈B | ∃a∈D: (a, b)∈R}

або

φ(D) =∪a∈D φ(a) = {b∈B | ∃a∈D: (a, b)∈R}.

***Прообразом множини*** С⊆В ***при відповідності*** R⊆A×B (або φ) є об’єднання прообразів усіх елементів із С:

R-1(С) = ∪b∈С R-1(b) = {a∈A | ∃b∈С: (a, b)∈R}

або

φ-1(С) =∪b∈С φ-1(b) = {а∈A | ∃b∈С: (a, b)∈R}.

**Основні типи відповідностей**

Відповідність R між множинами A і B називають ***всюди визначеною*** ⇔

образ кожного елемента з множини A непорожній ⇔

∀x∈A ∃y∈B: (x, y)∈R ⇔

x∈A ⇒ ∃y∈B: (x, y)∈R ⇔

Pr1(R) = A.

Відповідність, що не є всюди визначеною, називають ***частковою***.

Відповідність R між множинами A і B називають ***сюр’єктивною***, або ***сюр’єкцією***, або *відповідністю* ***на*** *множину* B ⇔

прообраз кожного елемента з множини B непорожній ⇔

∀y∈B ∃x∈A: (x, y)∈R ⇔

y∈B ⇒ ∃x∈A: (x, y)∈R ⇔

Pr2(R) = B.

Введемо необхідні в подальшому **позначення та поняття**:

Запис ∃! означає "***існує лише один***".

Якщо P(x) – деяке твердження, то запис вигляду ∃!x: P(x) еквівалентний такому:

∃x: (P(x)∧∀y (P(y) → (x = y))).

Якщо імплікація P(x1, x2, ..., xn) → Q(x1, x2, ..., xn) є істинною на всіх можливих наборах значень x1, x2, ..., xn, то кажуть, що ***з*** P ***слідує*** Q, або що Q є ***необхідною умовою для*** P, а P – ***достатньою умовою для*** Q. Цей факт ***позначають*** як P ⇒ Q.

**Функціональні та ін’єктивні відповідності**

Відповідність R між множинами A і B називають ***функціональною***, або ***функцією ⇔***

образ кожного елемента з множини A складається **не більш ніж з одного** елемента ⇔

образ кожного елемента із Pr1(R) містить **рівно один елемент** ⇔

∀x∈Pr1(R) ∃!y∈В: (x, y)∈R ⇔

∀x (((x, y1)∈R∧(x, y2)∈R) → (y1 = y2)) ⇔

((x, y1)∈R∧(x, y2)∈R) ⇒ (y1 = y2) ⇔

(y1 ≠ y2 ⇒ R-1(y1) ∩ R-1(y2) = ∅) (⇔

відповідність R - функціональна, якщо різним "y" відповідають різні "x").

Функціональну відповідність f між A і B (з графіком R) інколи називають ***функцією*** з A в B і кажуть, що функція f має ***тип*** A→B, та позначають це записом

f: A→B або A f→ B.

У функції f: A→B множина f(x), де x∈Pr1(f), складається з єдиного елементу, скажімо, y. Тому інколи під записом f(x) розуміють не множину {y}, а елемент y, тобто замість f(x) = {y} пишуть f(x) = у і кажуть, що f(x) (або *у*) є ***значенням функції*** f ***на аргументі*** x. Під записом f-1(y) також будемо розуміти не одноелементну множину, а саме цей єдиний елемент. Такі позначення, зокрема, дуже поширені в математичному аналізі. У подальшому ми будемо користуватися такими спрощеннями запису, якщо тільки це не створюватиме двозначності.

Зауважимо, що **функція може бути частковою відповідністю**. Для функції f з A в B можна розглядати її ***звуження*** f | A1 на множину A1, де A1⊆A.

***За означенням***, f | A1 = R ∩ (A1×B), тобто звуження зменшує область визначення функції.

Усюди визначену функціональну відповідність між A і B називають ***відображенням*** ***з*** A ***в*** B. Отже, відображення є окремим випадком функції.

***Множину всіх відображень з*** A в B позначають BA. За означенням BA⊆β(A×B).

Відповідність R між множинами A і B називають ***ін’єктивною***, або ***ін’єкцією ⇔***

⇔ прообраз кожного елемента з множини B містить **не більше ніж один елемент**  ⇔ прообраз кожного елемента з Pr2(R) складається **рівно з одного елемента** ⇔ ∀y∈Pr2(R) ∃!x∈А: (x, y)∈R ⇔

∀y (((x1, y)∈R∧(x2, y)∈R) → (x1= x2)) ⇔

((x1, y)∈R∧(x2, y)∈R) ⇒ (x1= x2) ⇔

x1 ≠ x2 ⇒ R(x1) ∩ R(x2) = ∅ (⇔

відповідність R - ін’єктивна, якщо різним "x" відповідають різні "y").

Інколи ін’єктивну відповідність називають ***взаємно однозначною або, скорочено,* 1-1 *відповідністю***, функціональну 1-1 відповідність – **1-1** ***функцією***, а ін’єктивне відображення – ***взаємно однозначним (1-1) відображенням***.

Неважко бачити, що діагональ iA є всюди визначеною, функціональною, ін’єктивною та сюр’єктивною відповідністю типу A→A.

Неважко помітити, що **означення всюди визначеності та сюр’єктивності двоїсті одне до одного**.

**Твердження** 4.1. Відповідність R⊆A×B між множинами A і B є всюди визначеною тоді й тільки тоді, коли обернена відповідність R-1⊆В×А між множинами В і А є сюр’єктивною.

Доведення. R - всюди визначена ⇔ ∀x∈A ∃y∈В: (x, y)∈R ⇔ ∀x∈A ∃y∈B:

(y, x)∈R-1 ⇔ R-1 - сюр’єктивна. ◄

**Означення функціональності та ін’єктивності також є двоїстими одне до одного**.

**Твердження** 4.2. Відповідність R між множинами A і B є функціональною тоді й тільки тоді, коли обернена відповідність R-1 є ін’єктивною.

Доведення. R - функція ⇔ ∀y1 ∀y2 ∀x (((x, y1)∈R∧(x, y2)∈R) → (y1 = y2)) ⇔

⇔ ∀y1 ∀y2 ∀x (((y1, x)∈R-1∧(y2, x)∈R-1) → (y1= y2)) ⇔ R-1 ін’єктивна. ◄

**4.2. Властивості відповідностей спеціальних типів**

**4.2.1. Критерії типізацій відповідностей**

**Теорема** 4.1. ***Критерій всюди визначеності***. Відповідність φ між множинами A і B є всюди визначеною тоді й тільки тоді, коли iA⊆φ◦φ-1.

► (⇒)

Розглянемо ∀(a, а)∈iA ⇔ ∀a∈A ⇒ (φ всюди визначена)

∀a∈A ∃b: (a, b)∈φ ⇔ (b, a)∈φ-1 ⇔ ∃b: ((a, b)∈φ∧(b, a)∈φ-1) ⇒ (a, a)∈φ◦φ-1.

(⇐)

Розглянемо ∀a∈A ⇔ (a, a)∈iA ⇒ (за умовою iA⊆φ◦φ-1) (a, a)∈φ◦φ-1 ⇔

⇔ ∃b∈B: ((a, b)∈φ∧(b, a)∈φ-1) ⇒ ∃b: (a, b)∈φ. ◄

**Теорема** 4.2. ***Критерій сюр’єктивності***. Відповідність φ між множинами A і B є сюр’єктивною тоді й тільки тоді, коли iB⊆φ-1◦φ.

► (⇒)

Розглянемо ∀(b, b)∈iB ⇔ ∀b∈B ⇒ (φ сюр’єктивна) ∃a: (a, b)∈φ ⇔

⇔ ∃a: ((b, a)∈φ-1∧(a, b)∈φ) ⇔ (b, b)∈φ-1◦φ.

(⇐)

Розглянемо ∀b∈B ⇔ (b, b)∈iB ⇒ (iB⊆φ-1◦φ) (b, b)∈φ-1◦φ ⇔

⇔ ∃a: ((b, a)∈φ-1∧(a, b)∈φ) ⇒ ∃a: (a, b)∈φ. ◄

**Теорема** 4.3. ***Критерій функціональності***. Відповідність φ між множинами A і B є функціональною тоді й тільки тоді, коли φ-1◦φ⊆iB .

► (⇒)

Розглянемо ∀(x, y)∈φ-1◦φ ⇔ (φ⊆A×B) x∈B∧(x, y)∈φ-1◦φ ⇔

⇔ x∈B∧∃z: ((x, z)∈φ-1∧(z, y)∈φ) ⇔

⇔ x∈B∧∃z: ((z, x)∈φ∧(z, y)∈φ) ⇒ (φ функціональна)

⇒ x∈B∧∃z: ((z, x)∈φ∧(z, y)∈φ∧(x = y)) ⇒ x∈B∧(x = y) ⇔ (x, y)∈iB.

(⇐)

(x, y1)∈φ∧(x, y2)∈φ ⇔ (y1, x)∈φ-1∧(x, y2)∈φ ⇒ ∃x: ((y1, x)∈φ-1∧(x, y2)∈φ) ⇒

⇒ (y1, y2)∈φ-1◦φ ⇒ (φ-1◦φ⊆iB) (y1, y2)∈iB ⇒ y1 = y2. ◄

**Теорема** 4.4. ***Критерій ін’єктивності***. Відповідність φ між множинами A і B є ін’єктивною тоді й тільки тоді, коли φ◦φ-1⊆iA.

► (⇒)

(x, y)∈φ◦φ-1 ⇔ (φ⊆A×B) x∈A∧(x, y)∈φ◦φ-1 ⇔

⇔ x∈A∧∃z: ((x, z)∈φ∧(z, y)∈φ-1) ⇔ x∈A∧∃z: ((x, z)∈φ∧(y, z)∈φ) ⇒ (φ - ін’єктивна) ⇒ x∈A∧∃z: ((x, z)∈φ∧(y, z)∈φ∧(x = y)) ⇒ x∈A∧(x = y) ⇔ (x, y)∈iA.

(⇐)

(x1, y)∈φ∧(x2, y)∈φ ⇔ (x1, y)∈φ∧(y, x2)∈φ-1 ⇒

⇒ (x1, x2)∈φ◦φ-1 ⇒ (φ◦φ-1⊆iA) (x1, x2)∈iA ⇒ x1 = x2. ◄

Безпосередньо з критеріїв всюди визначеності та функціональності отримуємо такий наслідок.

**Наслідок 4.1**. Відповідність φ між множинами A і B є відображенням тоді й тільки тоді, коли iA⊆ φ◦φ-1 і φ-1◦φ ⊆iB.

4.2.2. **Інваріантність типів теоретико-множинних операцій відповідностей**

**відносно композиції**

***Додавання нових елементів до всюди визначеної (або сюр’єктивної) відповідності, тобто її поповнення, зберігає її властивість бути всюди визначеною (або сюр’єктивною), а вилучення елементів може цю властивість порушити. З іншого боку, функціональність та ін’єктивність накладають обмеження єдиності. Тому вилучення елементів (зменшення) функціональної (або ін’єктивної) відповідності зберігає її властивість бути функціональною (або ін’єктивною), але поповнення може порушити умову єдиності, а тоді й властивість відповідності бути функціональною або ін’єктивною***. Викладемо наведені міркування більш формально.

**Твердження** 4.3. Нехай φ, ψ – відповідності між множинами A і B, такі, що φ⊆ψ.

1) Якщо φ є всюди визначеною, то ψ є всюди визначеною.

2) Якщо φ є сюр’єктивною, то ψ є всюди сюр’єктивною.

3) Якщо ψ є функціональною, то φ є функціональною.

4) Якщо ψ є ін’єктивною, то φ є ін’єктивною.

► 1) φ – всюди визначена ⇔ ∀x∈A ∃y∈B (x, y)∈φ ⇒

⇒ (φ⊆ψ) ∀x∈A ∃y∈B (x, y)∈ψ ⇔ ψ – всюди визначена.

3) ψ – функціональна ⇔ ∀y1 ∀y2 ∀x (((x, y1)∈ψ∧(x, y2)∈ψ) →

→ (y1 = y2)) ⇒ (φ⊆ψ) ∀y1 ∀y2 ∀x (((x, y1)∈φ∧(x, y2)∈φ) → (y1 = y2)) ⇔

⇔ φ – функціональна. ◄

Приклад 4.3. Нехай A = B = {1, 2}, φ = {(1, 2)}, ψ = {(1, 2), (2, 1)}, ω = A×B – відповідності між A і B. Маємо, що відповідність ψ є всюди визначеною, функціональною, ін’єктивною й сюр’єктивною; φ є її підмножиною; ω – надмножиною. При цьому відповідність φ між A і B не є ні всюди визначеною, ні сюр’єктивною, а ω – ні функціональною, ні ін’єктивною.

***З твердження 4.3 випливає, що властивість всюди визначеності (або сюр’єктивності) відповідностей зберігається при їх об’єднанні, тобто є інваріантною відносно об’єднання. Аналогічно, властивість функціональності (або ін’єктивності) відповідностей є інваріантною відносно їх перетину, різниці та симетричної різниці. (Доведення залишаємо для вправи)***.

Водночас, всюди визначеність та сюр’єктивність не є інваріантними відносно перетину, різниці або симетричної різниці, а функціональність та ін’єктивність – відносно об’єднання. Побудову **відповідних контрприкладів** також залишаємо для вправи.

4.2.3. ***Інваріантність типів відповідностей відносно операції композиції*** ◦

**Лема** 4.1. Якщо φ1 і φ2 – всюди визначені відповідності між A і B та B і F відповідно, то φ1◦φ2 є всюди визначеною відповідністю між A і F.

► Перший спосіб.

Розглянемо ∀a∈A ⇒ (φ1⊆A×B всюди визначена) ∃b: (b∈B∧(a, b)∈φ1) ⇒

⇒ (φ2⊆B×F всюди визначена) ∃b: ∃c∈F: ((a, b)∈φ1∧(b, c)∈φ2) ⇒

∃c∈F: (a, c)∈φ1◦φ2.

Другий спосіб.

Скористаємось критерієм всюди визначеності:

iA⊆φ1◦φ1-1 = φ1◦iB◦φ1-1⊆φ1◦(φ2◦φ2-1)◦φ1-1 = φ1◦φ2◦φ2-1◦φ1-1 = (φ1◦φ2)◦(φ1◦φ2)-1.

Отже, відповідність φ1◦φ2 є всюди визначеною на A за критерієм. ◄

**Зауваження**. Те, що відповідність φ1◦φ2 є відповідністю між A і F, випливає з означення композиції і не є головним у лемі 4.1. Тому на цьому в доведенні не наголошується, хоча формально цей факт потребує доведення. Те саме стосується й доведення наступних тверджень цього підрозділу.

**Лема** 4.2. Якщо φ1 і φ2 – функціональні відповідності між A і B та B і F відповідно, то φ1◦φ2 є функціональною відповідністю між A і F.

► Розглянемо (a, c1)∈φ1◦φ2∧(a, c2)∈φ1◦φ2 ⇔

⇔ ∃b1: ((a, b1)∈φ1∧(b1, c1)∈φ2) ∧∃b2: ((a, b2)∈φ1∧(b2, c2)∈φ2) ⇔

⇔ ∃b1: ∃b2: ((a, b1)∈φ1 ∧(a, b2)∈φ1∧(b1, c1)∈φ2∧(b2, c2)∈φ2) ⇒ (φ1 – функція)

⇒ ∃b1: ∃b2: ( (b1, c1)∈φ2∧(b2, c2)∈φ2∧(b1 =b2)) ⇔

⇔ ∃b1: ((b1, c1)∈φ2∧(b1, c2)∈φ2) ⇒ (φ2 – функція) c1 = c2. ◄

**Лема** 4.3. Якщо φ1 і φ2 – відображення із A в B та із B в F відповідно, то φ1◦φ2 є відображенням з A в F.

► Якщо φ1 та φ2 обидві є всюди визначеними й функціональними відповідностями, то за лемами 4.1, 4.2 відповідність φ1◦φ2 є всюди визначенною та функціональною відповідністю між A і F, а отже, відображенням з A в F. ◄

**Лема** 4.4. Якщо φ1 і φ2 – сюр’єктивні відповідності між A і B та B і F відповідно, то φ1◦φ2 є сюр′єктивною відповідністю між A і F.

► Відповідності φ1 і φ2 сюр’єктивні, тому відповідності φ1-1 і φ2-1 є всюди визначеними, а тоді за лемою 4.1 відповідність φ2-1◦φ1-1 між F і A є всюди визначеною. За властивостями композиції (φ1◦φ2)-1 = φ2-1◦φ1-1, тоді відповідність (φ1◦φ2)-1 також є всюди визначеною між F і A. Тоді φ1◦φ2 є сюр’єктивною відповідністю між A і F. ◄

**Лема** 4.5. Якщо φ1 і φ2 – ін′єктивні відповідності між A і B та B і F відповідно, то φ1◦φ2 є ін′єктивною відповідністю між A і F.

► Відповідності φ1 і φ2 ін’єктивні, тому відповідності φ1-1 і φ2-1 є функціональними, а тоді за лемою 4.2 відповідність φ2-1◦φ1-1 між F і A є функціональною. Проте (φ1◦φ2)-1 = φ2-1◦φ1-1, тому (φ1◦φ2)-1 є функціональною відповідністю між F і A. Тоді φ1◦φ2 є ін’єктивною відповідністю між A і F. ◄

На підставі доведених лем маємо загальну теорему.

**Теорема 4.5** (*про інваріантність типів відповідностей відносно операції композиції*).

Операція композиції відповідностей зберігає властивості відповідностей бути всюди визначеними, функціональними, ін’єктивним, сюр’єктивними відображеннями.

4.3. **Властивості бієкцій та їх побудова**

4.3.1. **Означення бієкції**

Всюди визначену, функціональну, сюр’єктивну та ін’єктивну відповідність між множинами A і B називають ***бієктивним відображенням***, або ***бієкцією***. Інколи замість терміна "бієкція" використовують термін "***взаємно однозначна відповідність***".

Взаємно однозначне перетворення множини A (бієкцію між A і A) називають ***підстановкою множини*** A. Прикладом підстановки множини A є діагональ iA .

З доведених вище тверджень 4.1, 4.2 про двоїстість оберненої відповідності та теореми 4.5 про інваріантність відносно композиції випливають такі наслідки.

**Наслідок** 4.2. Відповідність R між множинами A і B є взаємно однозначною відповідністю тоді й тільки тоді, коли R є відображенням з A в B і R-1 є відображенням з B в A.

**Наслідок** 4.3. Відповідність R між множинами A і B є взаємно однозначною відповідністю тоді й тільки тоді, коли обернена відповідність R-1 взаємно однозначна.

**Наслідок** 4.4. Якщо R1 є взаємно однозначною відповідністю між A і B, а R2 є взаємно однозначною відповідністю між B і F, то відповідність R1◦R2 є взаємно однозначною відповідністю між A і F.

4.3.2. **Побудова бієкцій**

Розглянемо спосіб доведення того, що між множинами A і B існує бієкція.

1. Будуємо певну відповідність φ.

2. Доводимо, що відповідність φ дійсно є відповідністю між A і B.

3. Доводимо, що відповідність φ є бієкцією між A і B.